

Cours – Séquence n° 3 – FONCTIONS (I) :

limites, comparaison, opérations

I- LIMITE FINIE OU INFINIE EN L'INFINI

1. Limite infinie en l'infini

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a; +\infty[$ où a est un nombre réel ou éventuellement $-\infty$.
- Dire que la fonction f **a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un nombre réel strictement positif, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
 - On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque

Avec les quantificateurs, cette définition peut s'écrire :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie $\forall A \in \mathbb{R}^{++}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Conjecturer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis démontrer avec la définition.

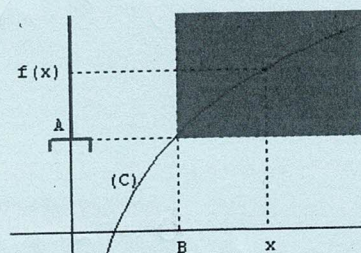
Conjecture : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car on a que $\forall A \in \mathbb{R}^{++} \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$

Soit $A \in \mathbb{R}^{++}$ on a $f(x) > A \Leftrightarrow \sqrt{x} > A$

$f(x) > A \Leftrightarrow x > A^2$ car $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Il suffit de choisir $B = A^2$

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}^{++} \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Exemple 2 Les fonctions de référence de limite $+\infty$ en $+\infty$ à connaître ($k \in \mathbb{R}^{++}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

On admet que les fonctions : $x \mapsto kx$, $x \mapsto kx^n$, $x \mapsto k\sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a; +\infty[$ où a est un nombre réel ou éventuellement $-\infty$.

- Dire que la fonction f **a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$, où A est un nombre réel strictement négatif, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
- On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

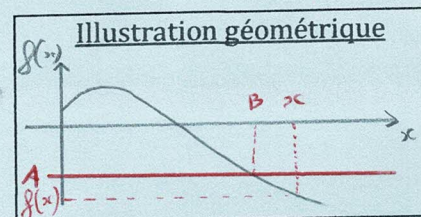
Remarque

Avec les quantificateurs, cette définition peut s'écrire :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie $\forall A \in \mathbb{R}^{*-}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) < A$

Exemple Les fonctions de référence de limite $-\infty$ en $+\infty$ à connaître ($k \in \mathbb{R}^{*-}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

On admet que les fonctions : $x \mapsto kx$, $x \mapsto kx^n$, $x \mapsto k\sqrt{x}$ ont pour limite $-\infty$ en $+\infty$.



Remarque

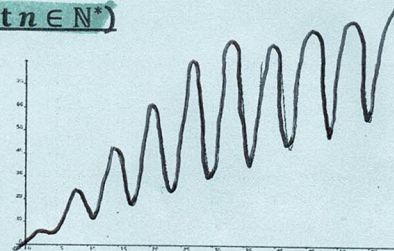
On définit de manière analogue les limites infinies d'une fonction en $-\infty$.

Exemple Les fonctions de référence de limite infinie en $-\infty$ à connaître ($k \in \mathbb{R}^{++}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

On admet que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} kx = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} kx^n = +\infty$ (si n est pair)
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} kx^n = -\infty$ (si n est impair)

Remarque

Une fonction qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

**2. Limite finie en l'infini**Définition

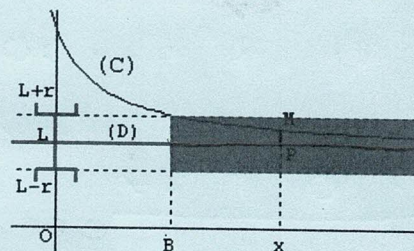
Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a; +\infty[$ où a est un nombre réel ou éventuellement $-\infty$.

- Dire que la fonction f **a pour limite un nombre réel L en $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
- On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Remarque

Avec les quantificateurs, cette définition peut s'écrire :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ signifie $\forall r \in \mathbb{R}^{++}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) \in]L-r; L+r[$



Exemple Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Conjecturer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis démontrer avec la définition.

Conjecture: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car on a que $\forall n \in \mathbb{R}^{++} \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) \in]0; n[$

Soit $n \in \mathbb{R}^{++}$ On a $f(x) \in]0; n[\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < n$

$f(x) \in]0; n[\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{n}$

$f(x) \in]0; n[\Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{1}{n}}$

car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{++}$
 car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Il suffit de choisir $B = \sqrt{\frac{1}{n}}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{R}^{++} \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) \in]0; n[$ Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Remarque

On définit de manière analogue la limite finie d'une fonction en $-\infty$.

Exemple Les fonctions de référence de limite 0 en l'infini à connaître ($k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

On admet que les fonctions : $x \mapsto \frac{k}{x}$, $x \mapsto \frac{k}{x^n}$ ont pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{x}}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

Définition

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$** .

Remarques

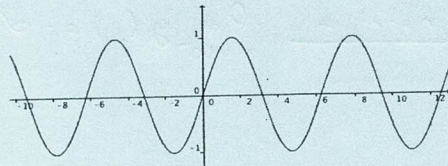
1. Interprétation graphique : si $M(x; f(x))$ et $P(x; L)$ alors la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, on définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple Pour la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on a prouvé que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Pour la droite d'équation $y=0$ (avec des abscisses) et asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$

3. Fonctions qui n'ont pas de limite en l'infini

Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini.



Exemples

Les fonctions trigonométriques $\sin$ et $\cos$ et plus généralement les fonctions sinusoidales n'ont pas de limite en l'infini.

II- LIMITE FINIE OU INFINIE EN UN RÉEL

Dans ce paragraphe, f est une fonction définie sur un ensemble D (intervalle ou réunion d'intervalles).

On étudie la limite de f en un nombre réel a que si a appartient à D ou si a est une borne de D .

1. Limite infinie en un nombre réel a

Définition

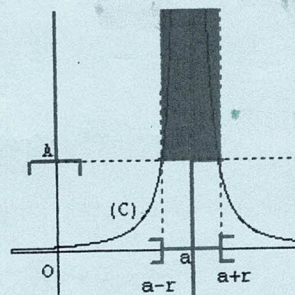
- Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un nombre réel strictement positif, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a .
- On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarques

- Avec les quantificateurs, cette définition peut s'écrire :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie $\forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists r \in \mathbb{R}^{*+} : \forall x \in]a-r; a+r[\cap D \Rightarrow f(x) > A$

- On définit de manière analogue la limite $-\infty$ d'une fonction en a .



Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Conjecturer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, puis démontrer avec la définition.

Conjecture: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ car on veut que $\forall A \in \mathbb{R}^{*+} \exists r \in \mathbb{R}^{*+} : \forall x \in]-r; r[\setminus \{0\} \Rightarrow f(x) > A$

Soit $A \in \mathbb{R}^{*+}$ On a $f(x) > A \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > A$

$f(x) > A \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A}$, car la fonction inverse est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

$f(x) > A \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{A}} < x < \sqrt{\frac{1}{A}}$, avec $x \neq 0$

Il suffit de choisir $r = \sqrt{\frac{1}{A}}$

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}^{*+} \exists r \in \mathbb{R}^{*+} : \forall x \in]-r; r[\setminus \{0\} \Rightarrow f(x) > A$

Pour $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Exemple 2 Soit g la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

Conjecturer graphiquement $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Conjecture: $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

Autre notation: $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

Exemple 3 Les fonctions de référence de limite infinie en 0 à connaître ($k \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k}{x^n} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k}{x^n} = +\infty \text{ (n pair)}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k}{x^n} = -\infty \text{ (n impair)}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Définition

Lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un nombre réel a (éventuellement à gauche ou à droite), on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale à la courbe de f** .

Exemples Pour les fonctions f et g précédentes,

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f et à la courbe de g .

2. Limite finie en un nombre réel a

Définition

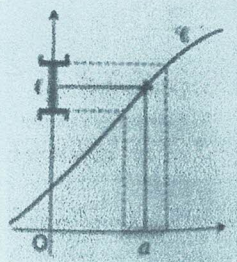
- Dire que la fonction f **a pour limite un réel L en a** signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a .
- On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Remarque

Si $a \in D$ et si f a une limite L en a , alors $L = f(a)$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$



III- LIMITES ET COMPARAISON

1. Théorèmes de comparaison : limite infinie

Théorème

Si f et g sont deux fonctions telles que :

(1) pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème

Si f et g sont deux fonctions telles que :

(1) pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Démonstration

1^{er} Théorème :

On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Parvenant que $\forall A \in \mathbb{R}^+ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$

D'après (1) $\exists B_1 \in \mathbb{R} : \forall x > B_1 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

D'après (2) $\exists B_2 \in \mathbb{R} : \forall x > B_2 \Rightarrow g(x) > A$

Il suffit de choisir $B = \max(B_1, B_2)$. Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}^+ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow g(x) > A$

Pour $\forall A \in \mathbb{R}^+ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$

Remarque

Ces deux théorèmes s'étendent aux cas de limites en $-\infty$ et en un point en changeant la condition (1).

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + \sin x$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

• Car, $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$

$-2x - 1 \leq \sin(x) \leq -2x + 1$

Pour $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq -2x + 1$

• Car, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 1) = -\infty$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2. **Théorème des gendarmes : limite finie****Théorème (admis)**

Si f , g et h sont trois fonctions telles que :

(1) pour x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ (avec l un nombre réel)

alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Remarque

Ce théorème s'étend aux cas de limites en $-\infty$ et en un point en changeant la condition (1).

Exemple Soit g la fonction définie sur $] -\infty ; 0[$ par $g(x) = \frac{2 + 3\sin x}{x^2}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*-}$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$-3 \leq 3\sin(x) \leq 3, \text{ car } 3 > 0$$

$$-1 \leq 2 + 3\sin(x) \leq 5$$

$$\frac{-1}{x^2} \leq \frac{2 + 3\sin(x)}{x^2} \leq \frac{5}{x^2}, \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}^{*-}, x^2 > 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^{*-}, \frac{-1}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{5}{x^2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$$

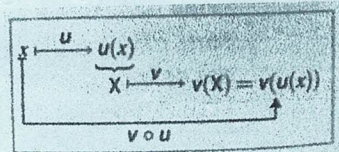
$$\text{Alors, d'après le Théorème des gendarmes, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

IV- COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS ET LIMITE

Définition

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout x de I , on ait $u(x) \in J$.

La **fonction composée** de u suivie de v , notée $v \circ u$ (lire « v rond u »), est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.



Exemple 1

u est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$. v est la fonction définie sur $J = \mathbb{R}$ par $v(x) = x^2$.

- La fonction $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x - 1) = (2x - 1)^2$.
- La fonction $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(x^2) = 2x^2 - 1$.

Exemple 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$.

Décomposer f sous la forme $v \circ u$ en précisant les fonctions u et v .

$$u: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{x-1}$$

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto e^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad u(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v(x) = e^x$$

Théorème (admis) : composition de limites

Chacune des lettres a , b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si u et v sont deux fonctions telles que :

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$$

$$(2) \lim_{X \rightarrow b} v(X) = c$$

$$\text{alors, } \lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c.$$

Exemple 1 Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \end{array} \right\} \text{ Donc, par composition, } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1}$$

Exemple 2 Soit j la fonction définie sur $] -\infty; 2[$ par $j(x) = \sqrt{2-x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty, \text{ donc, par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{ Donc, par composition, } \underline{\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = +\infty}$$

V- LIMITES ET OPÉRATIONS

Théorèmes (admis) : règles opératoires

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble de définition.

a désigne soit un nombre réel soit $+\infty$ soit $-\infty$.

l et l' désignent deux nombres réels.

• Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : on ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

• Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) =$	ll'	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

• Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l \neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$l' \neq 0$	0	∞	l	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarques

1. Exemple d'un cas de forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Dans chacun des cas ci-dessous, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- Cas 1 : si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} = x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
- Cas 2 : si $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- Cas 3 : si $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$.

On constate que trois réponses différentes sont possibles.

2. En cas de forme indéterminée, on utilisera des « astuces » permettant de « lever l'indétermination ».

Exemples Déterminer les limites suivantes et interpréter graphiquement lorsque c'est possible.

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x + 2)$; b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x + 2)$; c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{5\sqrt{x}}\right)$; d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 2}{-1 + 4x}$;
 e. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-3}$; f. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; g. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x + 2)$ c'est une forme indéterminée

"Astuce 1": on factorise par le terme prépondérant

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = 1$

Et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, donc, par quotient: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x + 2)$ c'est une forme indéterminée

"Astuce 1":

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

De manière analogue au cas a), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = 1$ Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{5\sqrt{x}}\right)$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5\sqrt{x}} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x^3 + 2}{-1 + 4x}\right)$ c'est une forme indéterminée

"Astuce 1 bis": on factorise par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur puis on simplifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(7 + \frac{2}{x^3}\right)}{x \left(-\frac{1}{x} + 4\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(7 + \frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x} + 4}$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 + \frac{2}{x^3} = 7$

Et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(7 + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} + 4\right) = 4$

Pour, par quotient $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = +\infty$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} i(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-3}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 3} 2x+1 = 7$ } Pour, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 3} i(x) = -\infty$
 Et, $\lim_{x \rightarrow 3} x-3 = 0^-$
 $x < 3$

Pour, par, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7$ } Pour, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 3} i(x) = 0^+$
 Et, $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0^+$
 $x > 3$

Pour, la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction.

f) $\lim_{x \rightarrow 5} j(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ C'est une forme indéterminée.

"Astuce 2": on multiplie et on divise par l'expression dite "conjugée".

$$\lim_{x \rightarrow 5} j(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} j(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} j(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} j(x) = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 5} (x-1) = 4$ } Pour, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = 2$
 Et, $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

Pour, par somme, $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x-1}+2) = 4$

Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 5} j(x) = \frac{1}{4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-x-6}$ C'est une forme indéterminée.

"Astuce 3": Quand on a une fonction rationnelle, dont le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 lorsque x tend vers a , on factorise le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$ et on simplifie.

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x-3}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 2} (2x-1) = -3$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (2x-1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1 \end{array} \right\} \text{D'après la règle, } \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{3}{1}$$

VI- FONCTION EXPONENTIELLE ET LIMITES

Lemme : propriété préliminaire à la démonstration d'une propriété

Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

Démonstration

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x - x - 1 \geq 0$

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = e^x - x - 1$

- P est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad P'(x) = e^x - 1$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P'(x) \geq 0$: (I)

$$(I) \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$$

$$(I) \Leftrightarrow e^x \geq 1$$

$$(I) \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
P'	-	0	+
P			

$$\text{Car } P(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

La fonction P a pour minimum 0

Pour $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$

$$1. \quad e^x - x - 1 \geq 0$$

$$2. \quad e^x \geq x + 1$$

Propriété : limites de la fonction exponentielle

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration

1) D'après le Lemme, $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x + 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x$

Car, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc, par le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}$$

(Changement de variable :

$$\text{on pose } X = -x \Leftrightarrow x = -X$$

Car, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, d'après 1), donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Propriété : théorème des croissances comparées

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty. \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$2. \text{ Pour tout entier naturel } n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty. \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Démonstration*

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$

Etudions la variation de g sur $\mathbb{R}^+$:

• g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme la somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g'(x) = e^x - x$$

• Or, d'après le lemme $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x > x+1$; donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x > x$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x - x > 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g'(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	1	

• La fonction g admet un minimum en 0

$$\text{c'est-à-dire, } g(0) = e^0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 1$$

• Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) \geq 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x - \frac{1}{2}x^2 > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x > \frac{1}{2}x^2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{e^x}{x^2} > \frac{1}{2}x$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

2) D'après le lemme, $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x+1$, donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, e^{\frac{x}{n}} > \frac{x}{n}$

$(e^{\frac{x}{n}})^{n+1} > (\frac{x}{n})^{n+1}$, car la fonction puissance est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$e^{x(n+1)} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

$$e^x > k x^{n+1} \text{ avec } k = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{e^x}{x^{n+1}} > k x$, car $x^n > 0$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} k x = +\infty$, car $k > 0$

Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = +\infty$

Propriété : conséquence du théorème des croissances comparées

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0.$$

$$2. \text{ Pour tout entier naturel } n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Démonstration

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ d'après le théorème des croissances comparées}$$

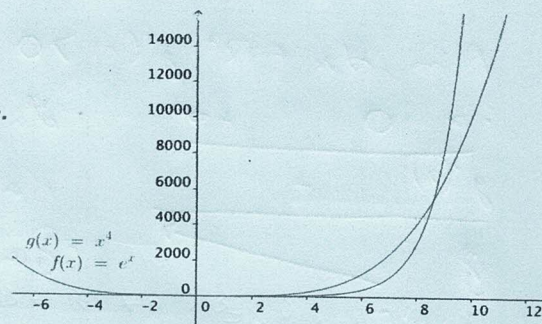
$$2) \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \times \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ d'après le théorème des croissances comparées}$$

Remarque

On peut entendre :

« En $+\infty$, la fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances ».

Sa croissance est plus rapide.



Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x^3$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3) \text{ forme indéterminée}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right)$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0, \text{ d'après le théorème des croissances comparées}$$

$$\text{Donc, par différence, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right) = 1$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \text{ donc, par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$